UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Elaine Ramires Aragão

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ISOMETRIAS E ORNAMENTOS

2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Elaine Ramires Aragão

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS
ISOMETRIAS E ORNAMENTOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp, como requisito parcial para a conclusão do Curso de Especialização em Matemática, sob a orientação da Prof. Msc. Ana Lucia N. Junqueira.

Campinas
2011

RESUMO

O presente trabalho traz, inicialmente, um relato histórico da Geometria, abrangendo desde a fase do Homem Primitivo até o início das transformações geométricas de Felix Klein. A seguir, faz um estudo histórico do desenvolvimento da Geometria, sublinhando e evidenciando as características de suas bases metodológicas e epistemológicas, associadas aos estudos psicogenéticos e à psicogênese de Piaget das noções geométricas, buscando dar um significado à noção de transformação. Por fim, é apresentado o estudo do objeto matemático transformações, focando as isometrias e relacionando-as à arte de M. C. Escher.

Palavras-chave: transformações geométricas; isometria; ornamentos; reflexão; rotação e translação.

ABSTRACT

In this research, we bring initially a historical account of geometry, since the primitive man until the beginning of geometric transformations of Felix Klein. Then do a historical study of the development of geometry, underlining and highlighting the features of its epistemological and methodological bases, associated with the psychogenesis and psychogenetic studies of geometric notions of Piaget, seeking to give a meaning to the concept of transformation. Finally, we conclude with the study of mathematical object-focusing on transformations, isometries relating them the art of M.C. Escher.

Keys-word: geometric transformations; isometries; ornaments; reflection; rotation and translation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa é parte conclusiva do Curso de Especialização de professores promovido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo em conjunto com a Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), dentro do "Programa Rede São Paulo de Formação Docente" (RedeFor).

O tema de estudo escolhido é *Isometrias e Ornamentos,* com o objetivo de contribuir para uma reflexão sobre uma metodologia diferenciada para o ensino-aprendizagem das transformações geométricas, apossando-se da arte para demonstrar conceitos geométricos.

No que concerne à Geometria das Transformações, o primeiro capítulo traz o relato histórico, no qual aparecem representadas nas formas sem serem definidas, perpassando pelo surgimento da geometria para, em seguida, ser apresentada a evolução das transformações geométricas até os dias de hoje.

No segundo capítulo, é feita uma breve análise epistemológica das Transformações Geométricas. Recorreu-se, então, a Piaget e Garcia (1987), que analisam historicamente o desenvolvimento epistemológico da Geometria, sublinhando e evidenciando as características de suas bases metodológicas, associadas aos estudos psicogenéticos e à psicogênese das noções geométricas, buscando dar um significado à noção de transformação e compreender como ocorreram as passagens dos níveis (Tríade Dialética) durante o desenvolvimento da história da Geometria das Transformações. Segundo eles, tanto o desenvolvimento histórico como a psicogênese das estruturas geométricas caracterizam-se por três etapas de desenvolvimento: intra, inter e transfigural.

Por fim, no terceiro capítulo, é apresentado o estudo do objeto matemático. As isometrias – rotações, translações e reflexões – são definidas matematicamente e exemplificadas pela arte dos ornamentos de Escher, como uma forma diferenciada de ensino e aprendizagem das transformações geométricas.

1. ABORDAGEM HISTÓRICA DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

"As abelhas, em virtude de certa intuição geométrica, sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e conterá mais mel com o mesmo gasto de material." (Papus de Alexandria)

Em relação à Geometria das Transformações, este capítulo traz inicialmente um relato histórico no qual aparecem representadas nas formas sem serem definidas, perpassando pelo surgimento da Geometria para, em seguida, apresentar a evolução das transformações geométricas até os dias de hoje.

Não há como precisar o período do surgimento da Geometria, considerando que é mais antiga do que a escrita. Somente após o Homem Primitivo ser capaz de deixar seus registros marcados nas cavernas é que a Antropologia Moderna foi capaz de fornecer algumas evidências de sua existência.

> *"O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém, seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar [...]. Mas as idéias são como sementes resistentes, e às vezes a origem resumida de um conceito pode ser apenas a reaparição de uma idéia muito mais antiga que ficara esquecida."* (Boyer, 1996, p.5)

Ao final da Idade da Pedra, em decorrência das mudanças climáticas, o homem foi impelido para uma agricultura intensiva e em grande escala, fazendo com que procurasse locais mais úmidos para se fixar e assim produzir seu próprio alimento, refugiando-se às margens dos rios Nilo e Eufrates. Nestas regiões, houve aumento da densidade populacional, levando as civilizações a desenvolverem técnicas agrícolas sofisticadas, o que promoveu profundas modificações culturais e sociais. Dá-se, a partir daí, a necessidade de demarcar terras para o cultivo e, consequentemente, a origem da Geometria Teórica. Contudo, deve-se salientar que não há nenhum exemplo do que hoje chamamos de demonstrações na Matemática Oriental Antiga.

Na Babilônia, assim como nas outras civilizações, a Geometria se relacionava com a mensuração prática e, no período de 2000 a.C. a 1600 a.C., os babilônios dominavam as regras gerais para encontrar área de figuras planas; possuíam conhecimento de semelhança e proporcionalidade de triângulos; tinham informações sobre o Teorema de Pitágoras e calculavam o volume de alguns sólidos geométricos.

> *“[...] os babilônicos do período de 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo [...]. Os babilônicos também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito numa semicircunferência e reto.”* (Eves, 2004, p. 60 e 61)

As histórias políticas, sociais e culturais do Egito e da Babilônia são muito diferentes. Os egípcios eram na maioria escravos, viviam em uma região de clima extremamente seco e, por venerar os mortos, construíram tumbas e templos. Por muito tempo, a região foi o mais rico campo de pesquisas históricas sobre a Antiguidade, porém, não se compara à Matemática Babilônica, que possuía caráter algébrico.

Segundo Fetissov (1994), para os egípcios e babilônios, as *“verdades geométricas”* eram empíricas, determinadas por procedimentos experimentais, enquanto os gregos praticavam uma Matemática mais dedutiva e sistemática, e, graças a eles, pela primeira vez, seriam usadas demonstrações em geometria.

A Geometria Grega foi a grande impulsionadora do desenvolvimento de vários trabalhos, dentre eles destacam-se Tales de Mileto (cerca de 640 a.C. - 550 a.C.), seguido por Pitágoras (cerca de 570 a.C. - 490 a.C.), Euclides (360 a.C. - 295 a.C.), Arquimedes (cerca de 290 a. C - 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C. – 190 a.C.).

> *“Os primeiros três séculos da matemática grega, começando com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C) e culminando com os notáveis Elementos de Euclides (por volta de 300 a.C), constituem um período de realizações extraordinárias. [...]. Além da escola jônica fundada por Tales de Mileto e da escola pitagórica de Crotona, muitos outros centros de matemática surgiram e floresceram em lugares e períodos de prevalência ampla da história política grega.”* (Eves, 2004, p. 129)

Segundo Boyer (1996), foi em *Elementos*, de Euclides – conjunto de 13 livros que não se limitam a abordar somente a geometria, mas também tratam da Teoria dos Números e da Álgebra –, que foram apresentados de forma organizada os conhecimentos de Geometria da época. Foi o primeiro conjunto de ideias desenvolvido pelo homem no qual umas poucas afirmações simples, chamadas axiomas, foram admitidas como verdadeiras e utilizadas para provar outras mais complexas. Os seis primeiros livros abrangem Geometria Plana Elementar, os livros VII, VIII e IX falam da Teoria dos Números; o livro X trata de Incomensuráveis; e os livros XI, XII e XIII versam sobre Geometria Espacial.

Ainda segundo Boyer (1996), podemos destacar, no primeiro livro, a proposição IV, que estabelece a congruência de dois triângulos, cuja demonstração se faz por sobreposição. “Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma à outra.”

Até o século XVIII, a obra de Euclides foi a contribuição mais importante para a Geometria e se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa para as gerações seguintes. Até os dias de hoje, *Elementos* é tomado como referencial matemático.

Essa obra representava, simultaneamente, o fundamento teórico da Geometria e o princípio para ingressar na disciplina. Mas convém precisar que os gregos desenvolveram dois tipos de Geometria: a Geometria da Medida e a Geometria de Posição. Foi Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.), quem deu importantes contribuições à Geometria de Posição e alçou a Geometria da Medida ao seu nível mais elevado.

De acordo com Eves (2004), Arquimedes foi um dos maiores matemáticos do Período Helenístico e dedicou a sua vida à aplicação prática da Matemática. É dele a dedução da lei de um postulado estático, no qual corpos bilateralmente simétricos estão em equilíbrio e, pelo seu axioma da simetria, o corpo está em equilíbrio.

> *“[…] suponhamos que uma barra sem peso, e quatro medidas de comprimento e suportando três unidades de peso em cada ponta e uma no meio (Fig. 2), e balanceada sobre um fulcro no seu centro. Pelo axioma de simetria de Arquimedes o sistema está em equilíbrio.”* (BOYER, 1996, p. 83-84).

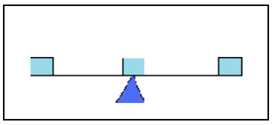


Figura 1: modelo idealizado por Arquimedes

O estudo das cônicas e das curvas estava em pleno desenvolvimento na época de Arquimedes e ele contribuiu notavelmente com o estudo das cônicas. Em sua obra, dedicada ao estudo da quadratura da parábola e ao cálculo do volume de paraboloides, elipsoides e hiperboloides de rotação, determinou importantes propriedades dessas curvas.

Cabe informar que a Geometria Grega não conhecia os conceitos de área e volume como hoje. Não há nos *Elementos* proposições como *"A área do triangulo é a base vezes a altura dividida por dois".* O comprimento, a área e o volume são números reais associados a grandezas geométricas: linhas, superfícies, corpos. Por haver grandezas incomensuráveis, na Matemática Grega, estabeleceu-se profunda cisão entre número e grandeza.

A Geometria Romana não pode ser comparada com a Grega, repleta de definições, axiomas teoremas e provas, mas sim com a Egípcia, voltada à prática aplicada à agrimensura. Porém, engenheiros e artistas das cidades italianas revelaram grande interesse pela Geometria que era registrado na arquitetura e na pintura, exibindo a beleza das formas repletas de simetria.

Até o Renascimento, o homem produzia representações artísticas do mundo em que vivia. Porém, não conseguia representar, em duas dimensões, objetos tridimensionais. A resposta veio pela aplicação de conhecimentos de Geometria e Álgebra que levou ao desenvolvimento da perspectiva linear.

Segundo Struik (1997), a noção de perspectiva linear era objeto de estudo de alguns homens, como Brunelleschi (1337-1446), Donatello (1386-1466), Uccello (cerca de 1397-1475), Masaccio (1401-1428), Alberti (1404-1472), Piero della Francesca (1416-1492), Leonardo da Vinci (1452-1519) e Rafael (1483-1520). As ideias de perspectiva, projeções centrais e paralelas, que se iniciaram no Renascimento, foram fundamentais no desenvolvimento da Geometria Projetiva e Descritiva, que posteriormente embasaram a Geometria das Transformações.

Depois dos gregos, grande mudança na Geometria foi notada somente no século XVII, com Girard Desargues (1591-1661), Blaise Pascal (1623-1662), René

Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). Recorrendo a Eves (2004), os dois primeiros abriram campo para a Geometria Projetiva, enquanto os outros desenvolveram um método aplicado para resolver problemas geométricos utilizando coordenadas. Desta concepção surge a Geometria Analítica ou Cartesiana, fazendo com que uma gama de problemas de Geometria se reduzisse ao cálculo algébrico.

Segundo Boyer (1996), Descartes tinha como objetivo geral as construções geométricas e não necessariamente a redução da Geometria à Álgebra. Ele partia de um problema geométrico, traduzindo-o para a linguagem de equação algébrica e, depois de simplificar ao máximo a equação, resolvê-lo geometricamente, o que era muito *"além do ponto em que os gregos se tinham detido"*. Por outro lado, Fermat se dedicava aos métodos analíticos.

Do ponto de vista da didática da Matemática, podemos observar que a tradução da linguagem algébrica para a geométrica, feita por Descartes, pode ser explicada atualmente por Régine Douady. A forma de manipular objetos matemáticos em vários contextos ou quadros, como verbal, gráfico e algébrico, pode favorecer o processo de construção do conhecimento desses objetos.

Cajori (2007) afirma que o século XVII presenciou o renascimento da Geometria Sintética[1] e coube a Claude Mydorge (1585-1647) um novo tratamento ao estudo das cônicas. Mas o feito de deixarem as abordagens já exploradas ficou para Desargues e Pascal, que tomaram novos rumos, introduzindo o método da perspectiva. Enquanto Apolônio considerava as cônicas como seções planas de um cone de base circular, Desargues concebeu as mesmas seções como projeções de círculos. Os trabalhos de Desargues e Pascal contêm as ideias fundamentais da moderna Geometria Sintética.

Enquanto a produtividade matemática do século XVIII se concentrou no cálculo e nas suas aplicações, vemos o ressurgimento da Geometria no século XIX, com o desenvolvimento da Geometria Descritiva[2], por Gaspard Monge (1746-1818), seguido por L. N. M. Carnot (1753-1823) e Jean-Victor Poncelet (1788-1867).

Monge observou que todas as operações relacionadas com construções de plantas eram feitas por processos aritméticos, que podiam ser substituídos por um

---

[1] Geometria que não adota métodos analíticos para resolver problemas geométricos.
[2] Gaspard Monge definiu a Geometria Descritiva como sendo a parte da Matemática que tem por fim representar sobre um plano as figuras do espaço, de modo a poder resolver, com o auxílio da Geometria Plana, os problemas em que se consideram as três dimensões.

método geométrico. Encontramos então uma Geometria que reunia método sintético e geométrico, dando início à Geometria Descritiva, precursora da Geometria das Transformações.

Segundo Struik (1997), os discípulos de Monge – Carnot e Poncelet – trabalharam com uma geometria que separava o método sintético, que originou a Geometria Analítica, do método algébrico, que originou a Geometria Algébrica.

Cajori (2007), afirma que Poncelet, em seu trabalho *Traité des propriétés Projectives des Figures*[3], investigou as propriedades das figuras que permanecem inalteradas pela operação de projeção, não sendo afetadas pelos raios paralelos de uma direção prescrita, mas por uma projeção central.

> *"Considere-se uma figura arbitrária numa posição geral e, sob certos aspectos, indeterminada entre todas as posições que ela pode tomar sem violar as leis, as condições e as relações existentes entre as diferentes partes do sistema. Suponhamos que uma ou mais relações ou propriedades – métricas, descritivas – se encontraram de acordo com esses dados.*
> *[...] Não é evidente que, quando, conservando estes mesmos dados, sujeitamos certas partes da figura original a um movimento contínuo, as propriedades e relações que se encontram no primeiro sistema se manterão nos estados sucessivos desse sistema, se forem apenas tomadas em conta modificações particulares [...], por exemplo, certas quantidades podem ter desaparecido ou mudado o seu sentido ou sinal [...]."* (Poncelet, *apud* Struik, 1997, p. 262).

Ainda no século XIX, Jakob Steiner (1796-1863) e Michel Chasles (1793-1880) fizeram notáveis demonstrações em Geometria Sintética. O último apresentou uma redução para as curvas cúbicas, na qual cinco curvas, das quais todas as outras podem ser projetadas, são simétricas em relação a um centro. Chasles, seguindo um caminho paralelo ao de Poncelet, foi introdutor dos imaginários para as funções simétricas dessas curvas. Notamos aqui o final do processo que começou com Monge, tematizado por Poncelet e Chasles: a introdução da noção de transformação em Geometria.

Durante alguns anos, a produtividade febril das novas Geometrias Projetiva e Algébrica ocultou o aparecimento de outros tipos novos de Geometria até que, no final do século XIX, Felix Klein (1849–1925) apresentou seus trabalhos nesta área.

Encontramos em Cajori (2007) um relato de pesquisa feita por H. S. While, final do século XIX e início do século XX, no qual calculou a taxa anual de publicação

[3] Tratado das propriedades projetivas das figuras.

em Matemática com a seguinte informação:

> "A geometria, dominada por "Plücker, e seu brilhante aluno Klein, por Clifford e Cayley", dobrou seu índice de produção de 1870 a 1890. A seguir diminuiu de um terço, para recuperar a maior parte de sua perda depois de 1899. A geometria sintética alcançou o seu máximo em 1887 e, então, decaiu nos vinte anos seguintes. O volume de geometria analítica sempre excedeu o de geometria sintética, o excesso sendo mais pronunciado a partir de 1887." (Cajori, 2007, p. 368).

Finalmente, foi com Felix Klein (1849-1945) que a Geometria das Transformações se inicia. Seu trabalho conjunto com Sophus Lie (1842-1899) teve como ponto de partida a noção de grupo de transformações no espaço. A Teoria dos Grupos apontou novos caminhos na pesquisa geométrica e a sua incorporação na Matemática Moderna.

Klein sintetizou suas ideias da seguinte maneira:

> *"Há transformações do espaço que não se alteram em nada as propriedades geométricas das figuras. Em contrapartida, estas propriedades são, com efeito, independentes da situação, ocupada no espaço pela figura considerada, da sua grandeza absoluta, e finalmente também do sentido em que estão dispostas as suas partes. Os deslocamentos do espaço, as suas transformações por semelhança e por simetria não se alteram, por isso, as propriedades das figuras, ou não alteram mais do que as transformações compostas pelas precedentes. Designaremos por grupo principal de transformações no espaço o conjunto de todas estas transformações: as propriedades geométricas não são alteradas pelas transformações do grupo principal. A recíproca é igualmente verdadeira: as propriedades geométricas são caracterizadas pela sua variância relativamente às transformações do grupo principal. Com efeito, se se considerar um instante o espaço como não podendo deslocar-se, etc., como uma multiplicidade fixa, cada figura possui uma individualidade própria; propriedades que ela possui como indivíduo, apenas aquelas que as transformações do grupo principal não alteram, são propriamente geométricas."* (Klein, *apud* Piaget e Garcia, 1987, p. 106)

A partir do exposto, apresentado por ele no seu Programa Erlanger, Klein chegou finalmente à mais clara, concisa e profunda reformulação da Geometria jamais realizada anteriormente e que abriu caminho para novas pesquisas em Geometria.

2. BREVE ANÁLISE EPISTEMOLÓGICA DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Piaget e Garcia (1987) fazem um estudo histórico do desenvolvimento da Geometria, sublinhando e evidenciando as características de suas bases metodológicas e epistemológicas, associadas aos estudos psicogenéticos e à psicogênese das noções geométricas, buscando dar significado à noção de transformação. Segundo eles, tanto o desenvolvimento histórico como a psicogênese das estruturas geométricas caracterizam-se por três etapas de desenvolvimento: intra, inter e transfigural.

A tríade dialética faz parte de um processo contínuo na construção do conhecimento. As estruturas correspondentes ao primeiro nível "intra" dão lugar, às análises do nível "inter" seguinte, e estas, por sua vez, à produção da estrutura "trans". Podemos perceber, a seguir, como ocorreram as passagens dos níveis durante o desenvolvimento da história da Geometria das Transformações.

A etapa Intrafigural, utilizada em Psicologia Genética, está relacionada à fase em que a criança é capaz de se ligar a uma ação repetível ou operatória, partindo das características internas ou das consequências imediatas atribuídas a determinados objetos, mas sem estabelecer relações entre eles.

Segundo Piaget e Garcia:

> *"A geometria começa, com Euclides, por um período durante o qual se estudam as propriedades das figuras e dos corpos geométricos enquanto relações internas entre os elementos destas figuras e destes corpos. Não se toma em consideração o espaço enquanto tal, nem, por consequência, as transformações das figuras no interior de um espaço que as compreenderia todas. Chamaremos a esta fase intrafigural, utilizando uma expressão já utilizada em psicologia genética para dar conta do desenvolvimento das noções geométricas na criança."* (Piaget e Garcia, 1987, p. 110).

Na segunda etapa, chamada Interfigural, inicia-se a noção de transformação do objeto e das ações em jogo, relacionando o espaço ao ambiente. Nesta fase, tendo compreendido as operações iniciais, o indivíduo é capaz de deduzir outras e de ligá-las às semelhantes, passando a entender, além das qualidades do objeto, as variáveis a ele relacionadas.

Ainda segundo este dois autores:

> *"[...] etapa caracterizada por um estabelecimento de relação das figuras entre elas, cuja manifestação específica é a procura de transformações, ligando figuras segundo múltiplas formas de correspondências, mas sem chegar à subordinação das transformações às estruturas de conjunto. É o período durante o qual a geometria dominante é a geometria projetiva. Chamaremos esta fase* interfigural.*"* (Piaget e Garcia, 1987, p. 110).

A última etapa, denominada Transfigural, comporta, além das transformações dos objetos, a síntese de modificações que os distingue entre si. Nesta fase, os modelos teóricos, além de fornecer os conceitos de representação do mundo, permitem a unidade e a coerência, ou seja, a compreensão do objeto de conhecimento em sua totalidade, permitindo a geração de novos conhecimentos a partir destes e promovendo o prosseguimento para novas fases intra, inter e transfigurais sucessivamente.

> *"[...] uma terceira etapa, que chamaremos transfigural, caracterizada pela preeminência das estruturas. A expressão mais caracterizada desta etapa é o Programa Erlangen, de Felix Klein."* (Piaget e Garcia, 1987, p.110).

Em síntese, foram necessários mais de 2 mil anos para que o estudo da Geometria das Transformações adquirisse a importância que tem hoje. O desenvolvimento destas três etapas, bem demarcadas na história da Geometria, se deve à evolução do processo de conceitualização das noções geométricas e à necessidade de um período de amadurecimento, proporcionado por novas aquisições e métodos, para que houvesse pleno crescimento de cada noção apresentada.

3. ANÁLISE MATEMÁTICA DOS ORNAMENTOS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

A Geometria das Transformações é um resumo das reformas que tentaram, de certa forma, melhorar o entendimento da Geometria, liberando o poder detido pela Geometria Euclidiana – baseada em figuras rígidas; a congruência de triângulos, como principal método de demonstrações – e da Geometria Analítica, introduzida por Descartes, que se tornou quase álgebra pura.

Tem-se falado muito na necessidade de o aluno construir seu próprio conhecimento. Para isso, é necessário que ele faça explorações, representações, construções, discussões, para que possa investigar, descobrir, descrever e perceber propriedades. Estas atitudes são amplamente discutidas nas Teorias das Situações Didáticas de Brousseau, enfatizando o aluno como um pesquisador.

O pensamento geométrico é excepcionalmente rico no desenvolvimento de certas habilidades, pois favorece certas ações como intuir, conjecturar, abstrair, generalizar e comprovar. Estudos ligados à Geometria propiciam o raciocínio dedutivo, favorecem também, em particular, o pensamento ligado às relações espaciais que serve como elo com as habilidades descritas anteriormente.

A busca de regularidades geométricas em padrões e pavimentações é um campo fértil, no qual os alunos podem exprimir livremente seu espírito criativo para estudar transformações geométricas, tais como as simetrias. O estudo das simetrias das figuras constitui uma aplicação muito interessante das isometrias, que permite desenvolver o conhecimento matemático destas transformações geométricas e fornecer, consequentemente, ferramentas que podem ser muito úteis na resolução de problemas geométricos.

Baseada nas ideias de Félix Klein, a Geometria das Transformações é muito atual, pois dá grande importância às estruturas matemáticas como grupos e isomorfismos.

As transformações mais estudadas no Ensino Fundamental são as isometrias – nas quais as simetrias recebem destaque - e as homotetias.

A simetria presente na natureza, seja nas formas vivas ou inanimadas, é um fenômeno que consideramos fascinante, pois demonstra a ideia de equilíbrio e proporção, padrão e regularidade, harmonia e beleza, ordem e perfeição. Podemos observar, a seguir, a simetria encontrada nos insetos.

Figura 2: Simetria bilateral em insetos
Disponível no site://www.adrianbruce.com/ Symmetry, acesso em 01/10/2011.

Podemos observar também o mesmo tipo de simetria nas artes – mosaicos.

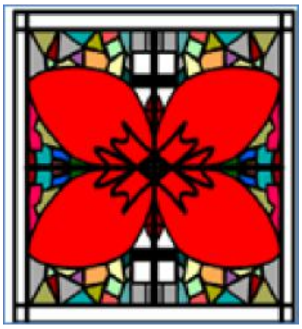


Figura 3: Disponível no site: http://www.peda.com/tess/2006/BloodStainedClematis.gif , acesso em 01/10/2011.

Na Arquitetura, um bom exemplo da presença efetiva da simetria é o monumento Taj Mahal. Nesta vista do edifício, podemos notar duas linhas de simetria, uma vertical e outra ao longo da linha d'água.

Figura 4: Monumento do Taj Mahal, disponível no site://www.adrianbruce.com/Symmetry/taj_mahal.htm, acesso em 01/10/2011.

Não é somente na Biologia e na Arquitetura que as transformações geométricas ganham destaque. Na Química, por exemplo, está presente no comportamento de alguns compostos químicos. Na Física, aparecem no estudo das imagens, espelhos, movimentos planetários, etc.

São as transformações geométricas que respondem às questões propostas pelas simetrias.

3.1 Transformações no Plano – Isometrias

Podemos definir como uma Transformação Geométrica no plano uma aplicação bijetora no conjunto de pontos do plano sobre si mesmo. As principais transformações geométricas no plano são: as isometrias e congruências, e as homotetias, que nos permitem encontrar caminhos diferentes para a resolução de problemas de construções geométricas. No entanto, a presente pesquisa abordará somente as isometrias.

São destacados aqui quatro tipos de isometrias no plano: a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão deslizante.

3.1.1 Isometrias – Definição

Definimos uma transformação no plano α como uma função bijetora $\mathcal{T}: \alpha \rightarrow \alpha$, isto é, uma função tal que:

a) Para $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \alpha$, $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$, $\mathcal{T}$ associa imagens distintas $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ de α.

b) Para cada ponto y de α, existe um único ponto x em α, tal que $y = \mathcal{T}(x)$.

Se $\mathcal{F}$ é uma figura contida em α, a imagem de $\mathcal{F}$ pela transformação $\mathcal{T}$ é definida como $\mathcal{T}(\mathcal{F})=\{\mathcal{T}(\mathcal{P}), \mathcal{P} \in \mathcal{F}\}$.

3.1.2 As Isometrias e a Congruência

Segundo Rezende e Queiroz (2000), Isometrias são transformações no plano que preservam as distâncias entre pontos, isto é, a distância entre dois pontos é igual à distância entre seus pontos imagens pela transformação no plano.

Uma isometria conserva:

- A ordem dos pontos numa reta.
- A colinearidade de pontos.
- A medida dos ângulos.
- O paralelismo de retas.

A noção de isometria permite generalizar o conceito de congruência, a princípio definido apenas para segmentos, ângulos e triângulos, ampliando-se depois para quaisquer subconjuntos não vazios de pontos do plano, chamados figuras geométricas.

Assim, duas figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ no Plano Euclidiano são congruentes, se existir uma isometria que aplica $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{F}'$.

Pode-se definir isometria como uma transformação no plano que preserva as distâncias, isto é, se $\mathcal{T}: \alpha \rightarrow \alpha$ é uma isometria, para qualquer par de pontos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de α vale a relação $d(\mathcal{T}(\mathcal{A}),\ \mathcal{T}(\mathcal{B})) = d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ou, simplesmente, $\mathcal{T}(\mathcal{A}),\ \mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}\mathcal{B}$.

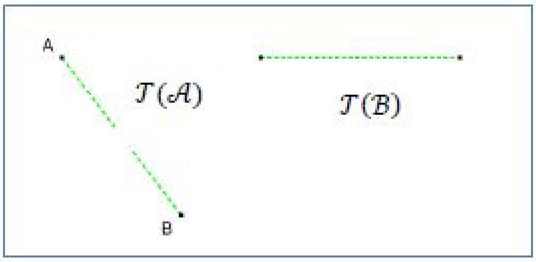


Figura 5: Isometria

A congruência entre duas figuras planas é definida por: duas figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ no Plano Euclidiano α são congruentes, se existe uma isometria $\mathcal{T}: \alpha \rightarrow \alpha$, tal que $\mathcal{G}$ é imagem de $\mathcal{F}$ por esta isometria.

São isometrias as reflexões em retas, translação e rotação.

3.1.3 Reflexões em retas ou simetria axial

Os exemplos mais importantes de isometria são as reflexões em retas, que podem ser definidas como: reflexão na reta r ou simetria axial é a transformação geométrica que fixa todos os pontos da reta r e associa a cada ponto $\mathcal{P}$ do plano, não pertence a r, o ponto $\mathcal{P}'$, de modo que r é a reta mediatriz do segmento $\mathcal{PP}'$.

A reta r chama-se eixo de simetria e os pontos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são chamados simétricos em relação à reta r.

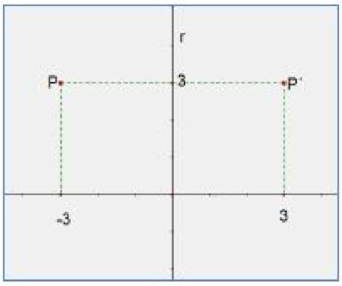


Figura 6: A reta *r* chama-se eixo de simetria e os pontos *P* e *P'* são chamados simétricos em relação à reta *r*

Para a reflexão em reta valem as seguintes propriedades:

a) $\mathcal{R}_r(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ é um ponto de r.

b) Se s é uma reta perpendicular à r, então $\mathcal{R}_r(s) = s$.

c) $\mathcal{R}_r(\mathcal{R}_r(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$, para todo ponto $\mathcal{P}$.

d) A transformação inversa de uma reflexão numa reta r é uma reflexão nesta mesma reta.

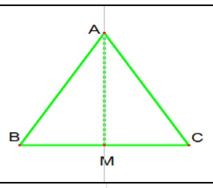
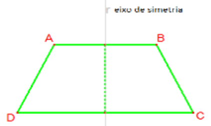
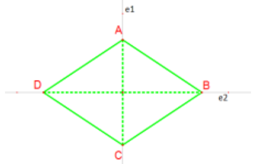
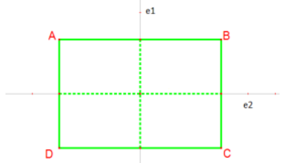
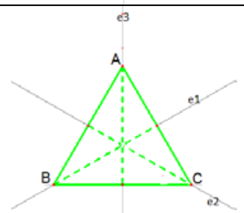
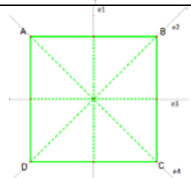
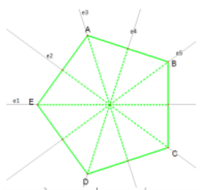
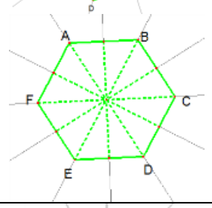
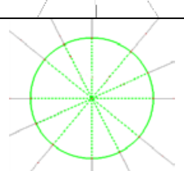
Barbosa (1993) afirma que a simetria axial conserva as distâncias e, por este motivo, diz-se que a simetria axial é uma isometria e consequentemente conserva também os ângulos.

O mesmo autor afirma, ainda, que a simetria axial inverte os sentidos, sendo chamada assim de simetria reflexional[4], pois compara as imagens com as refletidas

[4] Existem figuras $\mathcal{U}$ que podem ser vistas como a união de uma figura $\mathcal{F}$ com a sua imagem $\mathcal{F}'$, pela reflexão numa reta r, que intersecciona essa figura. Dizemos, então, que esta figura $\mathcal{U} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ é uma figura simétrica em relação à reta r ou, também, que $\mathcal{U}$ possui simetria de reflexão ou simetria axial. Neste caso, dizemos que a reflexão $\mathcal{R}_r$ é uma simetria axial interna, e r é o eixo de simetria interna ou, simplesmente, eixo de simetria da figura $\mathcal{U}$, o qual em geral é denotado pela letra *e*. (Rezende e Queiroz, 2000, p. 217).

no espelho.

Algumas figuras geométricas admitem um ou mais eixos de simetria interna, como, por exemplo:

	Triângulo isósceles	Possui um eixo de simetria interna (reflexional), que é a mediatriz da base $\overline{BC}$ do triângulo.
	Trapézio isósceles	Possui um eixo de simetria, que é a mediatriz de sua base.
	Losango	Tem dois eixos de simetria, e_1 e e_2, retas suporte de suas diagonais.
	Retângulo	Tem dois eixos de simetria, e_1 e e_2, medianas dos seus lados.
	Triângulo equilátero	Possui três eixos de simetria, e_1 e_2 e e_3, mediatrizes de seus lados.
	Quadrado	Tem quatro eixos de simetria, e_1, e_2, e_3, e e_4, que são as retas-suporte das diagonais e as medianas dos lados.
 	Polígono regular de n lados	Tem n eixos de simetria: retas passando pelo "centro" e pelos vértices.
	Círculo	Possui infinitos eixos de simetria.

De forma generalizada, pode-se dizer que quaisquer polígonos regulares de *n* lados possuem *n* eixos de simetria, ou melhor, apresentam estrutura simétrica ou que são figuras simétricas; sempre apresentam número de eixos de simetria igual ao número de lados. Os que têm número ímpar de lados possuem as bissetrizes como eixos de simetria, mas aqueles com número par de lados possuem metade bissetrizes e metade medianas. Entretanto, os polígonos irregulares podem ter estrutura simétrica ou não.

Algumas propostas de atividades podem partir da busca de figuras com estrutura simétrica, seja usando espelhos, caleidoscópios, malhas quadriculadas, frisos ou explorando mosaicos nas artes, podendo propiciar interessantes atividades educacionais.·.

O artista alemão M. C. Escher (1898-1972) utilizou as transformações geométricas de modo significativo em seus trabalhos. Em sua obra, explorou a repetição regular de figuras geométricas nos mosaicos, com aproveitamento das pavimentações do plano, dando movimento a peixes, pássaros, animais e figuras humanas que compunham suas obras, tornando-as dinâmicas. Ele utilizou em muitos de seus ornamentos simetria de reflexão, de rotação, de translação e a composição entre elas.

Dentre os trabalhos de Escher que abordam simetria de reflexão encontramos *Magic Mirror (1946)*, no qual seu espelho mágico reflete seus animais alados em contrastes e em ciclos contínuos de cor.

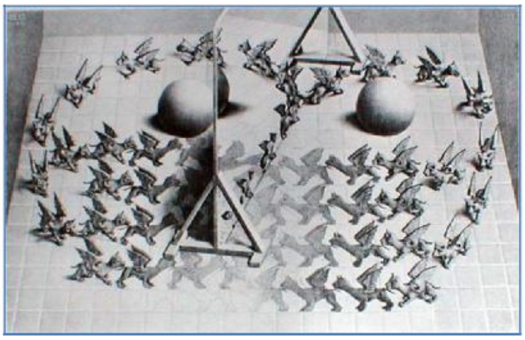


Figura 7: Magic Mirror, disponível no site: www.worldofescher.com/gallery/A26L.html, acesso em 13/10/2011.

> *"Sobre um chão ladrilhado está em vertical um espelho, donde nasce um animal de fábula. Pedaço a pedaço, ele aparece até que, animal completo, anda para a direita. A sua reflexão dirige-se para a esquerda, porém prova ser igualmente real, pois atrás do espelho, ela aparece como realidade. Primeiro andam numa fileira, atrás uns dos outros, depois aos pares e, por fim, encontram-se as duas correntes numa fila a quatro. Ao mesmo tempo perdem a sua plasticidade. Como peças de um 'puzzle' juntam-se, preenchem reciprocamente os espaços intermédios e unem-se com o chão, sobre o qual está o espelho."* (Escher).

Escher, sem conhecimento matemático prévio, mas por meio do estudo sistemático e da experimentação, descobre todos os diferentes grupos de combinações isométricas que deixam um determinado ornamento invariante. A reflexão é utilizada na xilografia *Day and Night*, uma das gravuras mais emblemáticas da carreira de Escher.

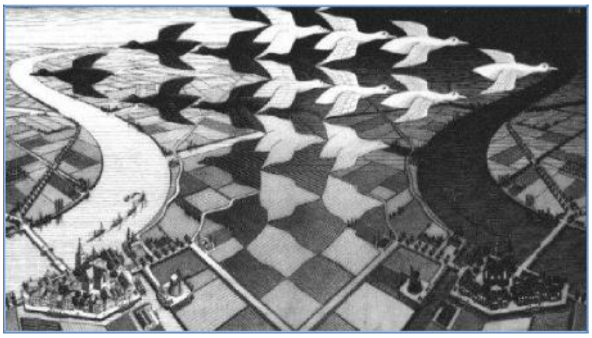


Figura 8: Escher, Day and Night. Disponível no site http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/dia_noite.htm, acesso em 15/10/2011.

A figura 8 é uma mostra da reflexão presente na obra de Escher: gansos pretos voam sobre uma vila ensolarada, enquanto gansos brancos voam numa versão noturna da mesma vila.

3.1.4 Translação

Na simetria da translação, a figura desliza sobre uma reta, mantendo-se inalterada, isto é, um movimento em que todos os pontos da figura percorrem segmentos paralelos de mesmo comprimento.

De acordo com Barbosa (1993), uma translação pode ser assim definida:

Dados uma direção por uma reta r e um segmento $\mathcal{MN}$ de comprimento u, consideremos um ponto qualquer P no plano.

Construímos um ponto $\mathcal{P}'$ tal que $\mathcal{PP}'//r$ e $\mathcal{PP}' = \mathcal{MN}$.

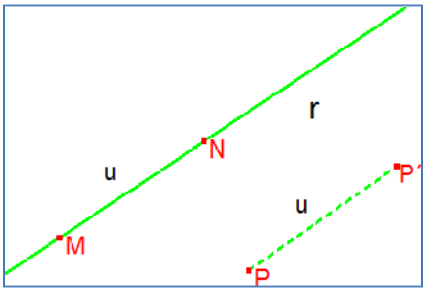


Figura 9

Dizemos que P' é simétrico de P por simetria translacional na direção r e no módulo u.

A reta r é chamada de eixo de translação.

A rigor, a cada ponto P correspondem dois simétricos por simetria translacional, de onde decorre ser, algumas vezes, conveniente orientar a reta num dos dois sentidos.

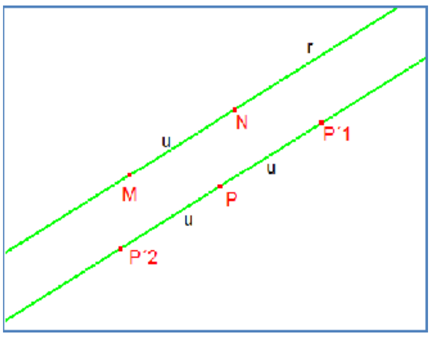


Figura 10

Uma transformação geométrica é uma translação de vetor, em que $\vec{u}$ possui direção e sentido de r e módulo $|\vec{u}|$. Podemos observar que a translação não tem ponto invariante.

Ainda, de acordo com o mesmo autor, por causa do paralelismo e da congruência de AA’ e BB’ com o segmento MN (fig. 9), resulta que ABB’A’ é um paralelogramo ou que A’B’ // AB e ainda A’B’ = AB. Portanto, a simetria translacional é uma isometria, mas conserva os sentidos.

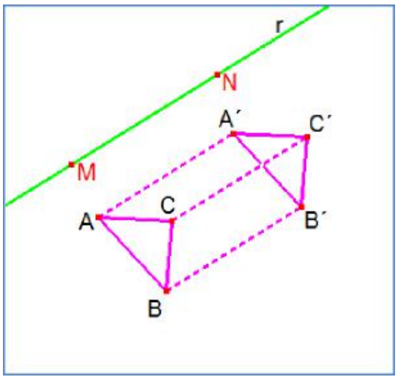


Figura 11

Escher explorou translações em algumas de suas obras, dentre elas podemos destacar *Sky and Water.*

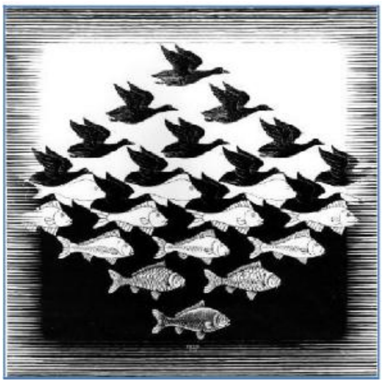


Figura 12: Sky and Water. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/dia_noite.htm, acesso em 15/10/2011.

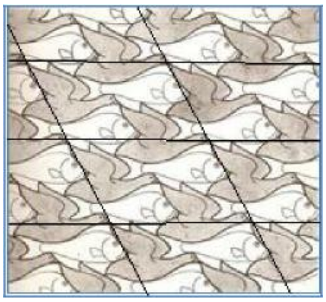


Figura 13: Estudo de uma repetição periódica no plano com aves e peixes.
Disponível em: <http://www. mcescher.com/Gallery/symmetry-bmp/E22.jpg>. Acesso em: 15/10/2011.

A simetria presente nas representações anteriores dá a impressão de movimento das figuras, e estas preenchem toda uma superfície pela repetição de um modelo.

O movimento representado na imagem peixes e aves (Fig.13) é o de translação. Pode-se observar nessa figura a divisão regular no plano, com os peixes deslocando-se na mesma direção assim como as aves. E possível observar a aplicação de uma pavimentação utilizando paralelogramos.

3.1.5 Rotação

Na simetria de rotação, a figura toda gira em torno de um ponto, que pode estar na figura ou fora dela, e cada ponto da figura percorre um ângulo com vértice nesse ponto. Trata-se de uma isometria muito comum que, contrariamente à translação, possui um ponto fixo. Todos os pontos do plano movimentam-se girando de um mesmo ângulo em torno deste ponto, designado ponto central.

Definimos uma rotação, como segue:

Seja O um ponto fixo no plano e um ângulo α (0 < α < 360º), e um ponto qualquer P não coincidente com O, construindo um ponto P’, tal que OP’= O P e PÔP’= α (fig. 14).

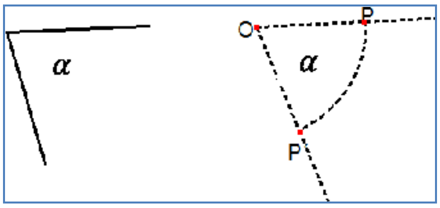


Figura 14

Dizemos que P’ é o simétrico de P por simetria rotacional ao redor de O de ângulo α. Ao ponto O chamamos de centro de rotação ou rotocentro, e a α de ângulo de rotação ou de giro.

Na prática, se diz *dar uma rotação ao ponto*, o que pode ser facilmente obtido, pois como OP’=OP resulta que os pontos P e P’ pertencem a uma circunferência de centro O. Portanto, a construção com o compasso é simples.

A rigor, a cada ponto P corresponde em geral dois pontos por simetria rotacional de mesmo ângulo (Fig. 15), de onde se torna conveniente algumas vezes orientar o ângulo, obtendo rotações no sentido horário ou no sentido anti-horário.

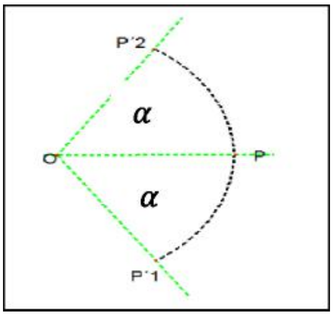


Figura 15

Em particular, se P coincide com O, dizemos que seu simétrico rotacional é o próprio ponto; dizemos então que o rotocentro é ponto invariante, como acontece na simetria reflexional, quando todos os pontos do eixo são invariantes.

Da igualdade dos ângulos AÔA' e BÔB' com α resulta (Fig.16) que: ΔAOB = ΔA'OB'; portanto, a rotação é uma isometria, mas que conserva os sentidos.

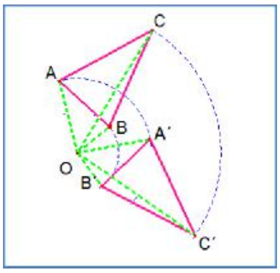


Figura 16

Destacamos alguns casos particulares:

- Rotação de 180°: Se o ângulo de rotação é de 180°, portanto, de meia volta ou de meio giro, dizemos que a simetria é central. A denominação é oriunda do fato de o centro de rotação ser agora ponto médio do segmento PP ', qualquer que seja o ponto P .
- Rotação de 0°: O simétrico do ângulo de 0° coincide com o próprio ponto. Esta transformação é denominada identidade.

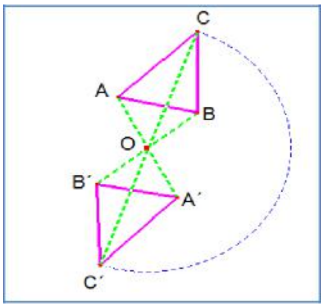


Figura 17: Rotação de 180°

Toda rotação de 0 e ângulo θ pode ser representada de muitas maneiras, como composta de duas reflexões em retas *r* e *s*. A única condição é que *r* e *s* se interceptem no ponto 0.

Escher, em muitos dos seus trabalhos, utilizou a rotação, como podemos observar a seguir.

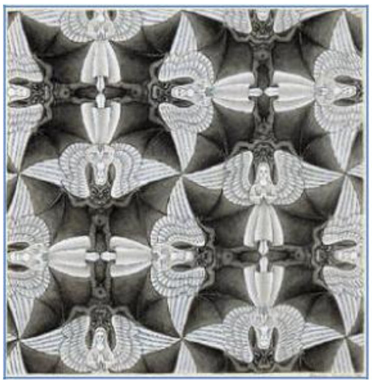


Figura 18: Recorte da obra de Escher denominada de *Anjos e Demônios*, disponível em http://www.mcescher.com/. Acesso em 17/10/2011.

Na gravura *Anjos e Demônios* (Fig.18) de Escher, pode-se identificar simetria de reflexão e simetria de rotação.

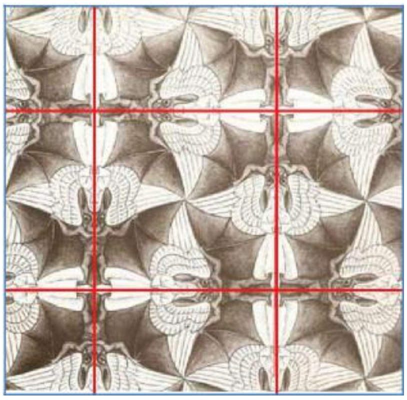


Figura 19: Eixos de simetria da obra *Anjos e Demônios*

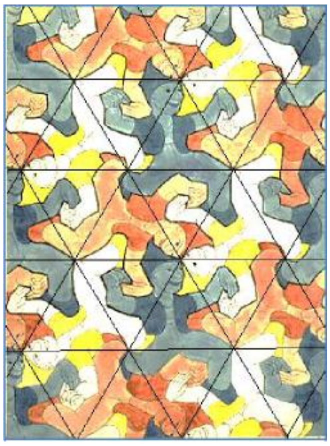


Figura 20: Recorte da obra de Escher, disponível em http://www.mcescher.com/. Acesso em 17/10/2011

Nesta obra (Fig.20) de Escher, uma pavimentação de triângulos equiláteros, lado a lado, formando uma rotação de 180° com seus vértices.

Em suma, acredita-se que, para os professores, não só na área de Matemática, como nas artes em geral, o estudo dos mosaicos e dos padrões fornece rica e inesgotável gama de possibilidades na exploração de atividades que enriquecerão a aprendizagem dos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo histórico revela que a Geometria nos remete à origem da humanidade e, durante todo o seu desenvolvimento, pôde-se observar as isometrias retratadas em ornamentos, cestarias, cerâmicas, na arquitetura, nas artes, enfim, em todas as áreas do conhecimento.

A análise epistemológica abordada na pesquisa, associada aos estudos psicogenéticos e à psicogênese das noções geométricas, nos mostra a incessante busca de um significado para a noção das transformações geométricas.

A exploração das isometrias nos ornamentos, em especial, nas obras de Escher, nos mostra que, além de um meio para a aprendizagem, de “olhar” uma imagem, se constitui em ensinar a “ver” aquilo que se observa, cujo fundamento é o conhecimento e, principalmente, práticas para criar o gosto pelo ato de ver, buscar conhecer e interagir com a imagem.

A observação, aliada às experiências concretas no processo ensino-aprendizagem, proporciona ao aluno a oportunidade de se emocionar com a estética artística e com a estética matemática. Quando há emoção, há envolvimento da capacidade intelectual, reconhecem-se valores e sensibilidade ao conhecimento.

Os conteúdos presentes na Arte e na Matemática propiciam aos alunos o desenvolvimento de uma forma diferenciada de pensar, o que lhes permite ter um olhar distinto sobre o mundo em que vivem. Trazem a Matemática para além de teorias e cálculos sem sentido, dando um significado ao que lhes foi ensinado. Eles aprendem a pensar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Sérgio e GALVÃO. Maria Elisa E. L. **Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares,** 1ª Edição. São Paulo. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1996.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza Gomide. 2ª edição. São Paulo, Editora Edgard Blucher, 1996.

BRUN. J. (direção). **Didáctica das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Ed. Instituto Piaget. Coleção: Horizontes, 2005.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Tradução: Lázaro Coutinho. Ed Ciência Moderna, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, Editora Unicamp, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1995.

LIMA, Elon L., CARVALHO Paulo Cezar P. **Coordenadas no Plano**. 4ª edição. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2002.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista. São Paulo, ano III, n. 4, p.3-13, 1995.

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações Geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2000.

PIAGET, J. & GARCIA, R. **Psicogênese e história das ciências**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

REZENDE, E. Q. F, QUEIROZ, M. L. B**., Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** Editora Unicamp, Campinas, 2000.

SILVA, Jaime Carvalho. **Livro I Dos Elementos de Euclides**. Nonius Arquivo Electrónico de Matemática. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/2parte.html>. Acesso em 10 out 2011.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução João Cosme Santos Guerreiro. Ed. Gradiva, 3ª edição, 1997.